УДК 517.5

Ровенська О. Г.

ПОКРАЩЕННЯ НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОТЕНЦІЙНИХ ПОЛІВ ШЛЯХОМ ПОВТОРНОГО ЛІНІЙНОГО УСЕРЕДНЕННЯ СУМ ФУР'Є

Інтерес до питань наближення аналітичних функцій, до яких, зокрема, належать функції, що можуть бути подані у вигляді інтегралу Пуассона, обумовлений їх численними застосуваннями як у різних галузях математики, так і в прикладних дисциплінах [1, 2]. Добре відомо [3], що у вигляді інтегралу Пуассона представляється розв'язок рівняння Лапласа, до якого приводять задачі у яких розглядається потенційні поля в неоднорідних середовищах різноманітної фізичної природи (наприклад, стаціонарне поле температур, магнітне поле в неоднорідному середовищі, електростатичне поле, поле швидкостей рідини при фільтрації та інші). Дослідження розв’язку таких задач потребує використання методів і результатів із різних галузей сучасного аналізу. Наприклад, до інтегралу Пуассона приводить задача про відшукання стаціонарного розподілу температури $t(r,\varphi)$ всередині високого кругового циліндру R, якщо на його поверхні підтримується температура $T = f(\varphi)$. Оскільки вздовж кожної граничної утворюючої циліндра підтримується постійна температура, то можна вважати, що розподіл температури не залежить від середнього горизонтального перерізу і може бути описаний у вигляді розв’язку $t = t(r,\varphi)$ рівняння Лапласа:

$$\Delta t = 0, \quad t(r) = R = f(\varphi). \tag{1}$$

Рівняння (1) у полярних координатах має вигляд:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial t}{\partial \varphi}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2}=0\,. \tag{2}$$

Частинні розв’язки рівняння (2) знаходяться у вигляді :

$$t = Z(r)\Phi(\varphi). \tag{3}$$

Підставляючи (3) в (2), отримаємо:

$$\Phi^{n}(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0, \tag{4}$$

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dZ}{dr}\right)-\lambda Z=0. \tag{5}$$

Оскільки

$$t(r,\varphi+2\pi)=t(r,\varphi)\,,$$

то $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$, і з (4) знаходимо $\sqrt{\lambda}=n$ (n – ціле), та

$$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi\,.$$

Тоді із (5), покладаючи $Z(r) = r^{\alpha}$, маємо $\alpha^2 = n^2$, $\alpha = \pm n \quad (n > 0)$, та, отже:

$$Z_n(\mathrm{r}) = \mathrm{ar}^{\mathrm{n}} + \mathrm{b}^{-\mathrm{n}}.$$

За умови $n = 0 \quad (\lambda = 0)$ із (5), маємо:

$$Z(r) = C_0 \ln r + C.$$

Оскільки при $r \to 0+$ виконується $r^{-n} \to \infty$ та $\ln r \to \infty$, то треба покласти

$$Z_n(\mathrm{r}) = \mathrm{ar}^{\mathrm{n}}, \; n = 1,2,...$$

та $Z_0 = C$. Розв'язок задачі знаходиться у вигляді ряду:

$$t(r,\varphi) = C + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi), \tag{6}$$

де коефіцієнти A_n та B_n визначаються граничною умовою:

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\cos n\psi d\psi,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\sin n\psi d\psi,$$

$$C = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi) d\psi.$$

Підсумовуючи ряд (6), отримаємо шуканий розподіл температури у вигляді інтегралу Пуассона:

$$t(r,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi)\frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2rR\cos(\varphi - \psi) + R^2} d\psi.$$

Не кожна функція, що може бути подана у вигляді інтегралу Пуассона, має простий вигляд. Тому важливими є питання наближення таких функцій більш простими об'єктами. Визначальною ідеєю теорії наближення функції є ідея заміни складних об'єктів у певному розумінні більш зручними, але наближеними до оригіналу. Вивчення відхилення, яке при цьому виникає між вихідною функцією та її наближенням є однією з основних задач цієї теорії. Найбільш простим і разом із тим найбільш природним прикладом лінійного процесу апроксимації неперервних періодичних функцій дійсної змінної може служити наближення цих функцій елементами послідовностей частинний сум ряду Фур'є $S_n(f;x)$. Проте, як добре відомо, суми Фур'є даної функції іноді збігаються до неї дуже повільно або взагалі є розбіжними навіть для деяких неперервних функцій. У зв'язку із цим значну кількість робіт цього напряму (див., наприклад, [4–7]) присвячено вивченню апроксимативних властивостей інших методів наближення, які породжуються певними перетвореннями частинних сум ряду

Фур'є та дозволяють побудувати послідовності тригонометричних поліномів, що рівномірно збігалися б для кожної функції $f \in C$.

Метою роботи є наближення функції, коефіцієнти Фур'є якої прямують до нуля зі швидкістю геометричної прогресії, сумами Фур'є та тригонометричними поліномами, що утворюються повторним лінійним усередненням сум Фур'є.

Розглянемо неперервну періодичну функцію (рис. 1).

$$f(x) = 0.171\frac{\sin x}{(1.81-1.8\cos x)^2} + \frac{1.8468\cos x\sin x}{(1.81-1.8\cos x)^3} + \frac{3.32424\sin x^3}{(1.81-1.8\cos x)^4}.$$

Її ряд Фур'є має вигляд:

$$S[f] = \sum_{n=0}^{\infty}(0,9)^n n^3 \sin nx.$$

Розглянемо наближення 20-ти частковою сумою ряду Фур'є (рис. 2).

Лінійні середні арифметичні сум Фур'є задаються таким чином:

$$V_{n,p}(f;x) = \frac{1}{p}\sum_{k=n-p}^{n-1} S_k(f;x),$$

$$V_{n,p_1,p_2}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1} V_{k+1,p_2}(f;x) = \frac{1}{p_1}\sum_{k=n-p_1}^{n-1}\frac{1}{p_2}\sum_{m=k-p_2+1}^{k} S_m(f;x),$$

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f;x).$$

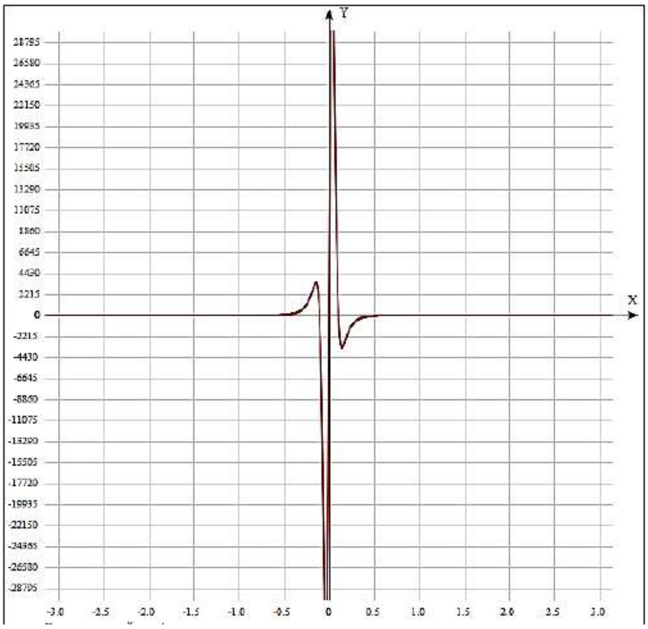

Рис. 1. Графік функції $f(x)$

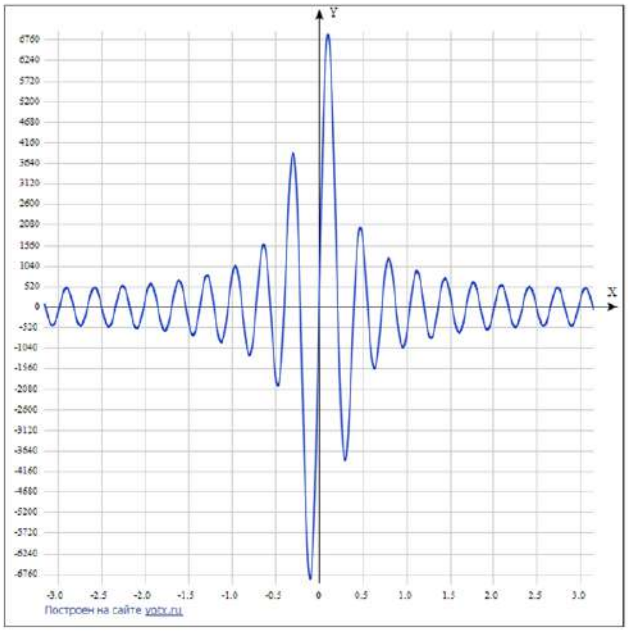

Рис. 2. Графік $S_{20}(f;x)$

Запишемо усереднені суми для вказаної функції за фіксованого значення параметрів:

$$V_{20,5}(f;x) = \frac{1}{5}\sum_{k=15}^{19} S_k(f;x),$$

$$V_{20,6,8}(f;x) = \frac{1}{6}\sum_{k=14}^{19} V_{k+1,8}(f;x) = \frac{1}{48}\sum_{k=14}^{19}\;\sum_{m=k-7}^{k} S_m(f;x),$$

$$\sigma_{20}(f;x) = \frac{1}{20}\sum_{k=0}^{19} S_k(f;x)$$

та побудуємо їх графіки (рис. 3–5).

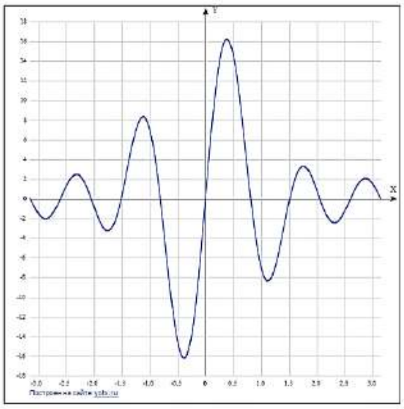

Рис. 3. Графік $V_{20,5}(f;x)$

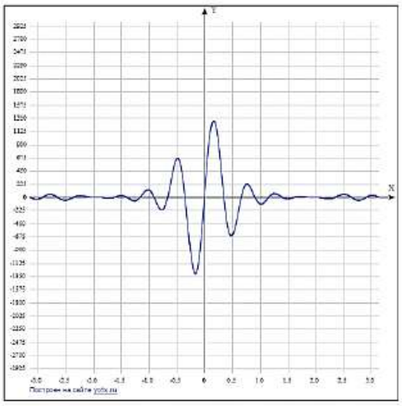

Рис. 4. Графік $V_{20,6,8}(f;x)$

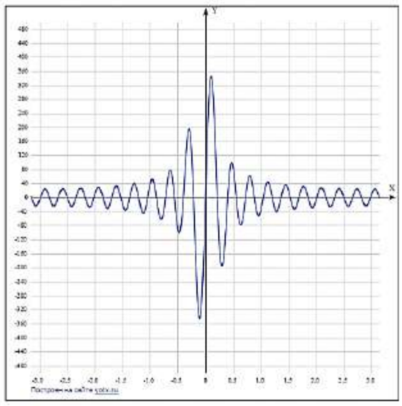

Рис. 5. Графік $\sigma_{20}(f;x)$

ВИСНОВКИ

На підставі наведених побудов можна зробити висновок про те, що повторне усереднення сум Фур'є в певному розумінні значно покращує їх апроксимативні властивості по наближенню гладких періодичних функцій. При цьому метод побудови наближуючи поліномів достатньо простий, не потребує спеціальних навичок і може бути використаний в багатьох областях фізики і техніки, де мають місце періодичні процеси.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Самойленко А. М. Математичні аспекти теорії нелінійних коливань / А. М. Самойленко, Р. І. Петришин. – К. : Наук. думка, 2004. – 474 с.*
2. *Степанец А. И. Методы теории приближений. В 2 ч. Ч. 1. / А. И. Степанец. – К. : Ин-т математики НАН Украины, 2002. – 427 с.*
3. *Соболев С. Л. Уравнения математической физики / Сергей Львович Соболев. – М. : Наука, 1966. – 443 с.*
4. *Rukasov V. I. Approximation of the classes of analytical functions by de la Vallee-Poussin sums / V. I. Rukasov, S. O. Chaichenko // Ukr. Math. J. – 2003. – Vol. 55, № 6. – P. 575–590.*
5. *Ровенская О. Г. Приближение периодических аналитических функций повторными суммами Валле Пуссена / О. Г. Ровенская // Динамические системы. – 2009. – Вып. 27. – С. 81–92.*
6. *Новиков О. А. Приближение классов интегралов Пуассона r-повторными суммами Валле Пуссена / О. А. Новиков, О. Г. Ровенская // Віcник Одеськ. нац. ун-ту. мат. і мех. – 2014. – Т. 19, Вип. 3 (23). – С. 14–26.*
7. *Новиков О. А. Спектральный анализ периодического сигнала / О. А. Новиков, О. Г. Ровенская, А. Н. Обухов // Науковий вісник Донбаської державної машинобудівної академії. – 2011. – № 2 (8Е). – С. 119–124.*

Стаття надійшла до редакції 16.01.2017 р.